代数幾何学シンポジウム記録
2002年度 pp.50-68


# Rational double points on supersingular $K3$ surfaces

北大・理　島田　伊知朗 (Ichiro SHIMADA)

代数閉体 $k$ の上で考える．$Y$ を normal な $K3$ 曲面とし，$f: X \to Y$ を minimal resolution とする．$Y$ の特異点は有理 2 重点である ([1, 2, 4])．$Y$ 上の有理 2 重点の $ADE$-型を $R_Y = \sum a_l A_l + \sum d_m D_m + \sum e_n E_n$ とし，全 Milnor 数 $\mu(Y)$ を

$$\mu(Y) := \sum a_l l + \sum d_m m + \sum e_n n$$

により定義する．すなわち，$\mu(Y)$ は $f$ により一点につぶされる $(-2)$-曲線の本数である．これらの $(-2)$-曲線の classes は $X$ の Picard 格子 $S_X$ のなかで負定値の部分格子を生成するから，$\mu(Y)$ は $S_X$ のランクよりも小さい．特に $k$ の標数が 0 ならば $\mu(Y) \leq 19$ である．一方，$k$ が正標数ならば $\mu(Y) \geq 20$ となる例が存在する (Dolgachev-Kondo [6])．

我々は，全 Milnor 数が 21 となる $K3$ 曲面上の有理 2 重点の configurations をすべて分類した．応用として，Ito [9, 11, 12] の諸結果を拡張し，$K3$ 曲面上に入る extremal な (準) 楕円 fibrations の構造をすべて決定した．

## 1　主結果

$ADE$-型とは，$A_l$ $(l \geq 1)$, $D_m$ $(m \geq 4)$, $E_n$ $(n = 6, 7, 8)$ の形式的な有限和のことである．$ADE$-型

$$R = \sum a_l A_l + \sum d_m D_m + \sum e_n E_n$$

に対し，そのランクを

$$\mathrm{rank}(R) := \sum a_l l + \sum d_m m + \sum e_n n$$

と定義する．

すべてのベクトルのノルムが偶数の格子を偶格子という．$Q(R)$ により，交叉行列が $ADE$-型 $R$ をもつカルタン行列 (の符号を逆転させたもの) で与えられる負定値偶格子をあらわす．$T$ を負定値な偶格子とする．$v^2 = -2$ となる $v \in T$ を $T$ の root という．Roots$(T)$ により $T$ の roots 全体のなす集合をあらわし，$T_{\mathrm{roots}}$ により Roots$(T)$ で生成される $T$ の部分格子をあらわす．Roots$(T)$ はタイプ $ADE$ のルート系をなす ([5, 7])．その $ADE$-型を $\Sigma(T)$ と書く．すなわち，$\Sigma(T)$ は $T_{\mathrm{roots}} \cong Q(\Sigma(T))$ となる $ADE$-型である．

$Y$ を全 Milnor 数が 21 の normal な $K3$ 曲面とし，$R_Y$ を $Y$ 上の有理 2 重点の $ADE$-型，$f: X \to Y$ を minimal resolusion とする．$X$ は超特異 $K3$ 曲面になる．$X$ の Picard 格子 $S_X$ は符号 $(1, 21)$ の偶格子である．Artin [3] は，$S_X$ の discriminant が $-p^{2\sigma_X}$ と書けることを示した．ここで，$p$ は基礎体の標数であり，$\sigma_X$ は $1 \leq \sigma_X \leq 10$ をみたす整数である．$\sigma_X$ は $X$ の Artin 不変量と呼ばれる．Artin [3], Rudakov-Shafarevich [17] および

Shioda [21] により，任意の素数 $p$ および $1 \le \sigma \le 10$ をみたす整数 $\sigma$ に対し，標数 $p$ の体上定義された Artin 不変量 $\sigma$ の超特異 $K3$ 曲面が存在することが示された．

$f$ により一点につぶされる $(-2)$-曲線の classes が $S_X$ のなかで生成する部分格子を $T_f$ と書く．定義により，$T_f$ は $Q(R_Y)$ と同型である．$S_X$ における $T_f$ の直交補空間 $T_f^{\perp}$ の生成元を $h_Y$ とし，

$$n_Y := h_Y^2$$

とおくと，$n_Y$ は正の偶数になる．

ランクが 21 の $ADE$-型 $R$，正の偶数 $n$，および $1 \le \sigma \le 10$ なる整数 $\sigma$ のなす三つ組 $(R, n, \sigma)$ を考える．

**命題 1** 三つ組 $(R, n, \sigma)$ に対する次のふたつの条件は同値である．

(1) 標数 $p$ において，全 Milnor 数 21 の normal $K3$ 曲面 $Y$ で $(R_Y, n_Y, \sigma_X) = (R, n, \sigma)$ となるものが存在する．

(2) 標数 $p$ における Artin 不変量 $\sigma$ の任意の超特異 $K3$ 曲面 $X$ は，$(-2)$-曲線の contraction $f : X \to Y$ で，$R_Y = R$, $n_Y = n$ となるものを持つ． □

**定義 2** 上記の条件を満たすとき，三つ組 $(R, n, \sigma)$ は標数 $p$ で実現可能であるという．

**定理 3** 標数 $p$ で実現可能な三つ組のリストは，この論説の後ろの部分にある Table RDP で与えられる． □

**系 4** 全 Milnor 数 21 の normal $K3$ 曲面は，標数 $p \le 19$ のとき，およびそのときに限り存在する． □

全 Milnor 数 21 の normal $K3$ 曲面が存在すれば $p \le 19$ であることは，Goto [8] の結果からも従う．

このリストのなかで特に興味深いのは，標数 2 における 10 個の三つ組 $(21A_1, 2, \sigma)$ $(\sigma = 1, \ldots, 10)$ である．Dolgachev-Kondo [6] において次の事実が指摘されている．標数 2 において，ある 6 次同次多項式 $G(x, y, z)$ により

$$w^2 = G(x, y, z)$$

で定義される normal な $K3$ 曲面 $Y_G$ を考える．これは $\mathbb{P}^2$ の純非分離被覆だから，$Y_G$ は超特異 $K3$ 曲面になる．$\Omega_{\mathbb{P}^2}(6)$ の大域切断 $dG$ が 21 個の孤立した零点しかもたなければ，$Y_G$ は $21A_1$ をもつ．(次数が 6 で標数が 2 だから，同次座標系をひとつ定めれば $dG$ は well-defined である．) 特に $G$ を general にとればこの条件は満たされる．Dolgachev-Kondo [6] は，$Y_G$ の Artin 不変量が 1 となる 6 次同次多項式 $G(x, y, z)$ を構成した．また，$G$ を general にとれば $Y_G$ の Artin 不変量は 10 となることがわかる．標数 2 において，三つ組 $(21A_1, 2, \sigma)$ がすべての Artin 不変量 $\sigma = 1, \ldots, 10$ に対して実現可能であることを用いて，次が証明される．

**命題 5** 標数 2 の任意の超特異 $K3$ 曲面 $X$ に対し，ある 6 次同次多項式 $G$ で次の性質を持つものが存在する．

(i) $Y_G$ の特異点は $21A_1$.

(ii) 21 本の $(-2)$-曲線の contraction $X \to Y_G$ が存在する． □

この命題は，標数 2 における超特異 $K3$ 曲面の単有理性 (Rudakov-Shafarevich [17]) の別証明を与える．

## 2 応用

$X$ を $K3$ 曲面とする．次の二つの条件をみたす射 $\phi : X \to \mathbb{P}^1$ を (準) 楕円 fibration という．

(i) $\phi$ の general fiber $F$ は $p_a(F) = 1$ なる既約かつ被約な曲線である．

(ii) 切断 $O : \mathbb{P}^1 \to X$ が存在する．

$F$ が非特異のとき $\phi$ は楕円 fibration であるといい，$F$ が特異点を持つとき $\phi$ は準楕円 fibration であるという．準楕円 fibration は標数 2 および 3 においてしか存在しない．

(準) 楕円 fibration $\phi : X \to \mathbb{P}^1$ の切断全体のなす集合は，$O$ を単位元とする abel 群の構造をもつ．この群を $\phi$ の Mordell-Weil 群といい，$MW_\phi$ と記す．$T_\phi$ を，切断 $O$ の像および $\phi(C)$ が一点となる既約曲線 $C$ の classes で生成される $S_X$ の部分格子とする．

**定理 6** (Shioda [22], Ito [9]) Mordell-Weil 群 $MW_\phi$ は $S_X/T_\phi$ と同型である． □

$\mathcal{R}_\phi$ により，$\phi^{-1}(v)$ が可約となる点 $v \in \mathbb{P}^1$ 全体の集合をあらわす．各 $v \in \mathcal{R}_\phi$ に対し，$O$ と交わらない $\phi^{-1}(v)$ の既約成分の classes は $S_X$ のなかで indecomposable な $ADE$-格子を生成する．その $ADE$-型を $R_v$ とし，

$$R_\phi := \sum_{v \in \mathcal{R}_\phi} R_v$$

とおく．$\mathrm{rank}(R_\phi) \leq 20$ が成立する．

**定義 7** $ADE$-型 $R_\phi$ のランクが 20 であるとき，(準) 楕円 fibration $\phi : X \to \mathbb{P}^1$ は extremal であるという．

$X$ が extremal な (準) 楕円 fibration $\phi$ をもてば，$X$ は超特異 $K3$ 曲面であり，$MW_\phi$ は有限 abel 群となる．また，$\phi$ が準楕円 fibration なら $\phi$ は必然的に extremal となる．

ランクが 20 の $ADE$-型 $R$, $1 \leq \sigma \leq 10$ なる整数 $\sigma$, および有限 abel 群 $MW$ からなる三つ組 $\langle R, \sigma, MW \rangle$ を考える．

**命題 8** 三つ組 $\langle R, \sigma, MW \rangle$ に対する次のふたつの条件は同値である．

(1) 標数 $p$ において，ある $K3$ 曲面 $X$ 上の楕円 fibration $\phi : X \to \mathbb{P}^1$ で $R_\phi = R$, $\sigma_X = \sigma$, $MW_\phi \cong MW$ となるものが存在する．

(2) 標数 $p$ における Artin 不変量 $\sigma$ の任意の超特異 $K3$ 曲面 $X$ は，$R_\phi = R$ かつ $MW_\phi \cong MW$ となる楕円 fibration $\phi : X \to \mathbb{P}^1$ をもつ．

また，三つ組 $\langle R, \sigma, MW \rangle$ に対する次のふたつの条件は同値である．

(1)′ 標数 $p$ において，ある $K3$ 曲面 $X$ 上の準楕円 fibration $\phi : X \to \mathbb{P}^1$ で $R_\phi = R$, $\sigma_X = \sigma$, $MW_\phi \cong MW$ となるものが存在する．

(2)′ 標数 $p$ における Artin 不変量 $\sigma$ の任意の超特異 $K3$ 曲面 $X$ は，$R_\phi = R$ かつ $MW_\phi \cong MW$ となる準楕円 fibration $\phi : X \to \mathbb{P}^1$ をもつ． □

**定義 9** 上記の条件 (1), (2) を満たすとき，三つ組 $\langle R, \sigma, MW \rangle$ は標数 $p$ における extremal な楕円 $K3$ 曲面の三つ組であるという．また，上記の条件 (1)′, (2)′ を満たすとき，三つ組 $\langle R, \sigma, MW \rangle$ は標数 $p$ における extremal な準楕円 $K3$ 曲面の三つ組であるという．

**定理 10** extremal な楕円 $K3$ 曲面の三つ組のリストは，この論説の後ろの部分にある Table E で与えられる．また，extremal な準楕円 $K3$ 曲面の三つ組のリストは，Table QE で与えられる． □

Table E および $p = 3$ に対する Table QE は，すでに Ito [9, 11, 12] により，別の方法で得られている．

# 3 証明

$X$ を $K3$ 曲面，$S_X$ をその Picard 格子とする．$R$ を $ADE$-型とする．

**命題 11** ([18]) $v^2 > 0$ をみたす $v \in S_X$ に対し，$v$ をある nef line bundle の class に移す $S_X$ の isometry が存在する． □

**命題 12** (Saint-Donat [19], Nikulin [15]) $X$ が $(-2)$-曲線の contraction $f : X \to Y$ で $R_Y = R$ となるものをもつための必要十分条件は，$X$ 上に $L^2 > 0$ かつ $\Sigma([L]^\perp) = R$ をみたす nef line bundle $L$ が存在することである． □

この 2 つの命題により，$X$ のもつ $(-2)$-曲線の contractions は $S_X$ の格子としての構造により完全に決定される．

**命題 13** $X$ が $(-2)$-曲線の contraction $f : X \to Y$ で $R_Y = R$ となるものをもつための必要十分条件は，$v^2 > 0$ かつ $\Sigma(v^\perp) = R$ をみたす $v \in S_X$ が存在することである． □

同様に，Kondo [13] および Nishiyama [16] の補題を使うことにより次が示される．$MW$ を有限 abel 群とする．

**命題 14** $X$ が $R_\phi = R$ かつ $MW_\phi \cong MW$ をみたす (準) 楕円 fibration $\phi : X \to \mathbb{P}^1$ をもつための必要十分条件は，$S_X$ がランク 2 の不定符号 unimodular な部分格子 $U$ で $\Sigma(U^\perp) = R$ かつ $U^\perp / (U^\perp)_{\mathrm{roots}} \cong MW$ なるものをもつことである． □

さて，つぎに超特異 $K3$ 曲面の Picard 格子の構造を調べよう．$\Lambda$ を偶格子とし，その双対格子を $\Lambda^\vee$ とする．

$$G_\Lambda := \Lambda^\vee/\Lambda$$

を $\Lambda$ の discriminant group という．$G_\Lambda$ にはいる自然な 2 次形式

$$q_\Lambda : G_\Lambda \to \mathbb{Q}/2\mathbb{Z}$$

を $\Lambda$ の discriminant form とよぶ．$G_\Lambda$ が $p$-elementary であるとき，$\Lambda$ は $p$-elementary であるという．2-elementary な偶格子 $\Lambda$ が type I であるとは，任意の $v \in \Lambda^\vee$ が $v^2 \in \mathbb{Z}$ をみたすことである．

**定理 15** (Artin [3], Rudakov-Shafarevich [18]) $X$ を標数 $p$ における超特異 $K3$ 曲面とし，その Artin 不変量を $\sigma$ とする．このとき，$S_X$ は符号 $(1,21)$ の偶格子で，その discriminant group は $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\oplus 2\sigma}$ と同型である．さらに，$p=2$ のときは，$S_X$ は type I である． □

素数 $p$ および $\sigma \le 10$ なる正整数 $\sigma$ に対し，$\Lambda_{p,\sigma}$ を次の条件をみたすランク 22 の偶格子とする．

(a) 符号は $(1,21)$.
(b) discriminant group は $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\oplus 2\sigma}$ と同型.

さらに，$p=2$ のときは次の条件を課す.

(c) $\Lambda_{p,\sigma}$ は type I.

**定理 16** (Rudakov-Shafarevich [18]) この 3 つの条件は，格子 $\Lambda_{p,\sigma}$ を同型を除いて unique に定める． □

以上をまとめて，次を得る．

**系 17** 三つ組 $(R,n,\sigma)$ が標数 $p$ で実現可能であるための必要十分条件は，primitive vector $h \in \Lambda_{p,\sigma}$ で $h^2=n$ かつ $\Sigma(h^\perp)=R$ をみたすものが存在することである． □

**系 18** 三つ組 $\langle R,\sigma,MW\rangle$ が標数 $p$ における extremal な (準) 楕円 $K3$ 曲面の三つ組であるための必要十分条件は，$\Lambda_{p,\sigma}$ がランク 2 の不定符号 unimodular な部分格子 $U$ で $\Sigma(U^\perp)=R$ かつ $U^\perp/(U^\perp)_{\mathrm{roots}} \cong MW$ なるものをもつことである． □

楕円 fibration と準楕円 fibration を区別するためには次の定理を用いればよい．

**定理 19** (Rudakov-Shafarevich [18]) 標数 $p$ は 2 または 3 であるとする．extremal な (準) 楕円 fibration $\phi : X \to \mathbb{P}^1$ が準楕円 fibration であるための必要十分条件は，$Q(R_\phi)$ が $p$-elementary であることである． □

$\Lambda$ を偶格子とする．$\Lambda \subset \Lambda' \subset \Lambda^\vee$ となる $\mathbb{Z}$-加群 $\Lambda'$ で，$\Lambda^\vee$ 上の $\mathbb{Q}$-値双線形形式が $\Lambda'$ 上 $\mathbb{Z}$ に値を持つとき，$\Lambda'$ を $\Lambda$ の overlattice という．

**命題 20** (Nikulin [15]) 自然な射影 $\mathrm{pr}: \Lambda^\vee \to G_\Lambda$ から得られる対応

$$S \mapsto \Lambda_S := \mathrm{pr}^{-1}(S)$$

は，$(G_\Lambda, q_\Lambda)$ の isotopic subgroups $S$ の集合と $\Lambda$ の偶である overlattices $\Lambda_S$ の集合のあいだに全単射を引き起こす．$\Lambda_S$ の discriminant group は $S^\perp/S$ と同型である． □

すなわち，$\Lambda$ の even overlattices は有限 abel 群 $G_\Lambda$ 上での有限回の計算によりすべて決定できる．

ランク 21 の $ADE$-型 $R$ と正の偶数 $n$ が与えられたとする．$I(n)$ を $e_n^2 = n$ なるベクトル $e_n$ で生成されるランク 1 の格子とし，

$$Q(R,n) := Q(R) \oplus I(n)$$

とおく．$Q(R,n)$ の符号はもちろん $(1,21)$ である．

**系 21** 三つ組 $(R,n,\sigma)$ が標数 $p$ で実現可能となるための必要十分条件は，$Q(R,n)$ が次の性質を有する overlattice $\Lambda$ をもつことである．

(i) $\Lambda$ は $\Lambda_{p,\sigma}$ と同型である．つまり，$\Lambda$ は条件 (b) と (c) を満たす偶格子である．

(ii) $e_n \in Q(R,n)$ は $\Lambda$ においても primitive のままである．

(iii) $e_n^\perp$ に含まれる roots は，$\mathrm{Roots}(Q(R))$ と一致する．つまり，$Q(R,n)$ が $\Lambda$ まで大きくなっても，$e_n^\perp$ に新しい roots はあらわれない． □

したがって，与えられた $(R,n)$ と $\sigma$ および $p$ に対し，$(R,n,\sigma)$ が標数 $p$ で実現可能かどうかは有限回の計算で決定される．

$[R,n,p]$ の可能性は有限個しかない．

**補題 22** $Q(R,n)$ の discriminant group $G_{Q(R,n)}$ が，$S^\perp/S \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\oplus 2\sigma}$ なる isotopic subgroup $S$ をもつとする．このとき，$(n,p)$ は次の有限集合 $NP(R)$ に含まれる．

$$\{\ (n,p)\ \mid\ p \in P_R,\ \ 2n \mid (N_R \cdot p^2),\ \ p^2 \mid (n \cdot |G_{Q(R)}|)\ \ \text{and}\ \ \sqrt{n \cdot |G_{Q(R)}|} \in \mathbb{Z}\ \}.$$

ここで，$P_R$ は $|\mathrm{disc}\, Q(R)| = |G_{Q(R)}|$ の素因子の集合であり，$N_R$ はすべての $x \in G_{Q(R)}$ に対し $N_R \cdot q_{Q(R)}(x) = 0$ をみたす最小の正整数である． □

以上の準備のもとで Table RDP をつくるアルゴリズムを記述する．まず，集合

$$\mathcal{R} := \{\ [R,n,p]\ \mid\ \mathrm{rank}(R) = 21,\ \ (n,p) \in NP(R)\ \}$$

を計算する．これは 20169 個の三つ組からなる．各 $[R,n,p] \in \mathcal{R}$ に対し，$Q(R,n)$ の overlattice $\Lambda$ をリストアップしていく．$\Lambda$ が系 21 の条件 (i), (ii), (iii) をみたせば，$(R,n,\sigma)$ を標数 $p$ で実現可能な三つ組のリストにいれる．

Table E と Table QE をつくるには，系 18 の変形である次を用いる．

**系 23** 三つ組 $\langle R,\sigma,MW\rangle$ が標数 $p$ における extremal な (準) 楕円 $K3$ 曲面の三つ組であるための必要十分条件は，次をみたす $h, z \in \Lambda_{p,\sigma}$ が存在することである．

(i) $h^2 = 2$, $\Sigma(h^\perp) = R + A_1$, $z \in \mathrm{Roots}(h^\perp)$.
(ii) 任意の $r \in \mathrm{Roots}(h^\perp) \setminus \{\pm z\}$ にたいし $rz = 0$.
(iii) $h - z$ は $\Lambda_{p,\sigma}$ において 2 でわりきれる.
(iv) $(h-z)/2$ と $z$ で生成される部分格子 $U$ は $MW \cong U^\perp/(U^\perp)_{\mathrm{roots}}$ を満たす.

特に，$\langle R, \sigma, MW \rangle$ が標数 $p$ における extremal な (準) 楕円 $K3$ 曲面の三つ組であるなら，$(R + A_1, 2, \sigma)$ は標数 $p$ で実現可能である. □

まず，ランク 20 の $ADE$-型 $R$ で，$(R+A_1, 2, \sigma)$ が Table RDP のなかにあるものをすべて選び出す．$z \in Q(R+A_1, 2)$ を $R+A_1$ の $A_1$ に対応する root とする．また $h \in Q(R+A_1, 2)$ を $e_2 \in I(2)$ とする．$Q(R+A_1, 2)$ の overlattice $\Lambda$ で系 21 の条件 (i), (ii), (iii) をみたすものをリストアップしていく．$\Lambda$ のなかで $h-z$ が 2 でわりきれれば，$MW \cong U^\perp/(U^\perp)_{\mathrm{roots}}$ により $MW$ を計算し，$\langle R, \sigma, MW \rangle$ をリストに加える．

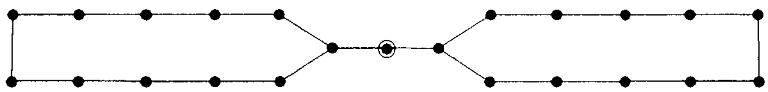
以上のアルゴリズムを実行するプログラムを C 言語で書き，Tables RDP, E, QE を得た．証明およびアルゴリズムの細部については，プレプリント [20] を参照されたい．

## 4 例

• 標数 11 で $A_{21}$ をもつ超特異 $K3$ 曲面 (Artin 不変量は 1, $n_Y$ は 22). Ito [11] により

$$y^2 = x^3 - 3u^8 x + 2u$$

で定義される標数 11 の楕円 $K3$ 曲面は $\mathrm{I}_{11}$ 型のファイバーを 2 本 (と II 型を 1 本) もつことが示されている．この楕円 $K3$ 曲面は，したがって



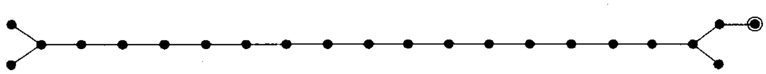
◉ はzero section

なる (−2)-曲線の configuration をもつ．このなかの $A_{21}$ を contract すれば $A_{21}$ をもつ超特異 $K3$ 曲面が得られる．

• 標数 2 で $D_{21}$ をもつ超特異 $K3$ 曲面 (Artin 不変量は 1, $n_Y$ は 4). Dolgachev-Kondo [6] によって

$$y^2 = x^3 + t^{11}$$

で定義される標数 2 の準楕円 $K3$ 曲面は $D_{20}$ 型のファイバーを 1 本もつことが示されている．この準楕円 $K3$ 曲面は



なる (−2)-曲線の configuration をもつことがわかる．このなかの $D_{21}$ を contract すれば $D_{21}$ をもつ超特異 $K3$ 曲面が得られる．

## Table RDP: The complete list of $RDP$-triples geometrically realizable in characteristics $p$

| $p = 19$ | | |
|---|---|---|
| $R$ | $n$ | $\sigma$ |
| $A_{18} + A_3$ | 76 | 1 |

| $p = 19$ | | |
|---|---|---|
| $R$ | $n$ | $\sigma$ |
| $A_{18} + A_2 + A_1$ | 114 | 1 |

| $p = 17$ | | |
|---|---|---|
| $R$ | $n$ | $\sigma$ |
| $A_{16} + A_5$ | 102 | 1 |

| $p = 17$ | | |
|---|---|---|
| $R$ | $n$ | $\sigma$ |
| $A_{16} + A_4 + A_1$ | 170 | 1 |
| $A_{16} + A_3 + A_2$ | 204 | 1 |

| $p = 13$ | | |
|---|---|---|
| $R$ | $n$ | $\sigma$ |
| $E_8 + A_{12} + A_1$ | 26 | 1 |
| $E_7 + A_{12} + A_2$ | 78 | 1 |
| $A_{12} + A_8 + A_1$ | 234 | 1 |

| $p = 13$ | | |
|---|---|---|
| $R$ | $n$ | $\sigma$ |
| $A_{12} + A_7 + A_2$ | 312 | 1 |
| $A_{12} + A_6 + A_3$ | 364 | 1 |
| $A_{12} + A_4 + A_3 + A_2$ | 780 | 1 |

| $p = 11$ | | |
|---|---|---|
| $R$ | $n$ | $\sigma$ |
| $E_8 + A_{10} + A_3$ | 44 | 1 |
| $D_{11} + A_{10}$ | 44 | 1 |
| $D_9 + A_{10} + A_2$ | 132 | 1 |
| $D_7 + A_{10} + A_4$ | 220 | 1 |
| $A_{21}$ | 22 | 1 |

| $p = 11$ | | |
|---|---|---|
| $R$ | $n$ | $\sigma$ |
| $A_{11} + A_{10}$ | 132 | 1 |
| $2A_{10} + A_1$ | 2 | 1 |
| $A_{10} + A_8 + A_3$ | 396 | 1 |
| $A_{10} + A_6 + A_5$ | 462 | 1 |
| $A_{10} + A_6 + A_4 + A_1$ | 770 | 1 |

| $p = 7$ | | |
|---|---|---|
| $R$ | $n$ | $\sigma$ |
| $E_8 + E_7 + A_6$ | 14 | 1 |
| $E_8 + D_7 + A_6$ | 28 | 1 |
| $E_8 + A_{13}$ | 14 | 1 |
| $E_8 + A_7 + A_6$ | 56 | 1 |
| $E_8 + 2A_6 + A_1$ | 2 | 1 |
| $E_7 + A_{13} + A_1$ | 14 | 1 |
| $E_7 + A_8 + A_6$ | 126 | 1 |
| $E_7 + 2A_6 + A_2$ | 6 | 1 |
| $E_6 + A_9 + A_6$ | 210 | 1 |
| $E_6 + 2A_6 + A_3$ | 12 | 1 |
| $D_{15} + A_6$ | 28 | 1 |
| $D_{14} + A_6 + A_1$ | 14 | 1 |
| $D_{12} + A_6 + A_3$ | 28 | 1 |
| $D_9 + 2A_6$ | 4 | 1 |
| $D_9 + A_6 + A_4 + A_2$ | 420 | 1 |
| $D_8 + A_7 + A_6$ | 56 | 1 |
| $D_7 + A_{13} + A_1$ | 28 | 1 |
| $D_5 + A_{10} + A_6$ | 308 | 1 |

| $p = 7$ | | |
|---|---|---|
| $R$ | $n$ | $\sigma$ |
| $D_5 + 2A_6 + A_4$ | 20 | 1 |
| $A_{20} + A_1$ | 42 | 1 |
| $A_{15} + A_6$ | 112 | 1 |
| $A_{15} + A_6$ | 28 | 1 |
| $A_{14} + A_6 + A_1$ | 210 | 1 |
| $A_{13} + A_8$ | 126 | 1 |
| $A_{13} + A_7 + A_1$ | 56 | 1 |
| $A_{13} + A_6 + A_2$ | 6 | 1 |
| $A_{13} + A_6 + 2A_1$ | 2 | 1 |
| $A_{12} + A_6 + A_2 + A_1$ | 546 | 1 |
| $A_{11} + A_6 + A_4$ | 420 | 1 |
| $A_9 + 2A_6$ | 10 | 1 |
| $A_9 + A_6 + A_5 + A_1$ | 210 | 1 |
| $A_8 + A_7 + A_6$ | 504 | 1 |
| $A_8 + 2A_6 + A_1$ | 18 | 1 |
| $A_8 + A_6 + A_5 + A_2$ | 126 | 1 |
| $3A_6 + A_2 + A_1$ | 42 | 1,2 |
| $2A_6 + A_5 + A_4$ | 30 | 1 |

| $p=5$ | | |
|---|---|---|
| $R$ | $n$ | $\sigma$ |
| $2E_8+A_4+A_1$ | 10 | 1 |
| $E_8+D_7+A_4+A_2$ | 60 | 1 |
| $E_8+A_9+A_4$ | 2 | 1 |
| $E_8+A_9+A_3+A_1$ | 20 | 1 |
| $E_8+A_6+A_4+A_3$ | 140 | 1 |
| $E_8+3A_4+A_1$ | 10 | 1, 2 |
| $E_7+D_{10}+A_4$ | 10 | 1 |
| $E_7+D_5+A_9$ | 20 | 1 |
| $E_7+A_{14}$ | 30 | 1 |
| $E_7+A_{10}+A_4$ | 110 | 1 |
| $E_7+A_9+A_5$ | 30 | 1 |
| $E_7+A_9+A_4+A_1$ | 2 | 1 |
| $E_6+D_6+A_9$ | 30 | 1 |
| $D_{16}+A_4+A_1$ | 10 | 1 |
| $D_{15}+A_4+A_2$ | 60 | 1 |
| $D_{12}+A_4+A_3+A_2$ | 60 | 1 |
| $D_{11}+A_9+A_1$ | 20 | 1 |
| $D_{11}+A_6+A_4$ | 140 | 1 |
| $D_7+A_9+A_4+A_1$ | 4 | 1 |
| $D_7+A_7+A_4+A_3$ | 40 | 1 |
| $D_7+3A_4+A_2$ | 60 | 1, 2 |
| $D_6+A_{11}+A_4$ | 60 | 1 |
| $D_6+A_9+A_6$ | 70 | 1 |
| $D_6+A_9+A_4+A_2$ | 6 | 1 |
| $D_5+A_{14}+A_2$ | 20 | 1 |

| $p=5$ | | |
|---|---|---|
| $R$ | $n$ | $\sigma$ |
| $A_{19}+A_2$ | 60 | 1 |
| $A_{17}+A_4$ | 90 | 1 |
| $A_{17}+A_4$ | 10 | 1 |
| $A_{15}+A_4+A_2$ | 240 | 1 |
| $A_{15}+A_4+A_2$ | 60 | 1 |
| $A_{14}+A_7$ | 120 | 1 |
| $A_{14}+A_5+A_2$ | 30 | 1 |
| $A_{14}+A_4+A_3$ | 12 | 1 |
| $A_{14}+A_4+A_2+A_1$ | 2 | 1 |
| $A_{13}+A_4+A_3+A_1$ | 140 | 1 |
| $A_{12}+A_9$ | 130 | 1 |
| $A_{12}+A_5+A_4$ | 390 | 1 |
| $A_{11}+A_4+2A_3$ | 60 | 1 |
| $A_{10}+A_9+A_2$ | 330 | 1 |
| $A_{10}+A_7+A_4$ | 440 | 1 |
| $A_9+A_8+A_4$ | 18 | 1 |
| $A_9+A_8+A_3+A_1$ | 180 | 1 |
| $A_9+A_7+A_5$ | 120 | 1 |
| $A_9+A_6+A_4+A_2$ | 42 | 1 |
| $A_9+A_5+A_4+A_3$ | 12 | 1 |
| $A_9+3A_4$ | 2 | 1, 2 |
| $A_9+2A_4+A_3+A_1$ | 20 | 1, 2 |
| $2A_8+A_4+A_1$ | 90 | 1 |
| $A_8+A_6+A_4+A_3$ | 1260 | 1 |
| $A_6+3A_4+A_3$ | 140 | 1, 2 |
| $5A_4+A_1$ | 10 | 1, 2, 3 |

| $p=3$ | | |
|---|---|---|
| $R$ | $n$ | $\sigma$ |
| $2E_8+A_5$ | 6 | 1 |
| $2E_8+A_3+A_2$ | 12 | 1 |
| $2E_8+2A_2+A_1$ | 2 | 1 |
| $E_8+E_7+E_6$ | 6 | 1 |
| $E_8+E_7+A_4+A_2$ | 30 | 1 |
| $E_8+E_7+3A_2$ | 6 | 1, 2 |
| $E_8+2E_6+A_1$ | 2 | 1 |
| $E_8+E_6+A_6+A_1$ | 42 | 1 |
| $E_8+E_6+A_5+A_2$ | 6 | 1, 2 |
| $E_8+E_6+A_3+2A_2$ | 12 | 1, 2 |
| $E_8+E_6+3A_2+A_1$ | 2 | 2 |
| $E_8+D_{11}+A_2$ | 12 | 1 |
| $E_8+D_9+2A_2$ | 4 | 1 |
| $E_8+D_5+A_6+A_2$ | 84 | 1 |
| $E_8+D_5+A_4+2A_2$ | 20 | 1 |
| $E_8+A_{11}+A_2$ | 4 | 1 |
| $E_8+A_{11}+2A_1$ | 12 | 1 |
| $E_8+A_{10}+A_2+A_1$ | 66 | 1 |
| $E_8+A_9+2A_2$ | 10 | 1 |
| $E_8+A_8+2A_2+A_1$ | 18 | 1, 2 |

| $p=3$ | | |
|---|---|---|
| $R$ | $n$ | $\sigma$ |
| $E_8+A_7+A_5+A_1$ | 24 | 1 |
| $E_8+A_7+A_4+A_2$ | 120 | 1 |
| $E_8+A_6+3A_2+A_1$ | 42 | 1, 2 |
| $E_8+2A_5+A_3$ | 4 | 1 |
| $E_8+A_5+A_4+2A_2$ | 30 | 1, 2 |
| $E_8+A_5+4A_2$ | 6 | 1, 2, 3 |
| $E_8+A_3+5A_2$ | 12 | 2, 3 |
| $E_8+6A_2+A_1$ | 2 | 2, 3 |
| $2E_7+D_5+A_2$ | 12 | 1 |
| $2E_7+A_3+2A_2$ | 4 | 1 |
| $E_7+2E_6+A_2$ | 6 | 1, 2 |
| $E_7+E_6+A_7+A_1$ | 24 | 1 |
| $E_7+E_6+A_5+A_3$ | 4 | 1 |
| $E_7+E_6+A_4+2A_2$ | 30 | 1, 2 |
| $E_7+E_6+4A_2$ | 6 | 1, 2, 3 |
| $E_7+D_{10}+2A_2$ | 2 | 1 |
| $E_7+D_8+A_5+A_1$ | 6 | 1 |
| $E_7+D_5+A_5+2A_2$ | 12 | 1, 2 |
| $E_7+D_4+2A_5$ | 2 | 1 |
| $E_7+A_{10}+2A_2$ | 22 | 1 |

| $p = 3$ | | |
|---|---|---|
| $R$ | $n$ | $\sigma$ |
| $E_7 + A_9 + 2A_2 + A_1$ | 10 | 1 |
| $E_7 + A_7 + 3A_2 + A_1$ | 24 | 1, 2 |
| $E_7 + A_6 + A_4 + 2A_2$ | 70 | 1 |
| $E_7 + A_5 + A_3 + 3A_2$ | 4 | 2 |
| $E_7 + A_4 + 5A_2$ | 30 | 2, 3 |
| $E_7 + 7A_2$ | 6 | 2, 3, 4 |
| $3E_6 + A_3$ | 12 | 1, 2 |
| $3E_6 + A_2 + A_1$ | 2 | 1, 2 |
| $2E_6 + D_9$ | 4 | 1 |
| $2E_6 + D_5 + A_4$ | 20 | 1 |
| $2E_6 + A_9$ | 10 | 1 |
| $2E_6 + A_8 + A_1$ | 18 | 1, 2 |
| $2E_6 + A_6 + A_2 + A_1$ | 42 | 1, 2 |
| $2E_6 + A_5 + A_4$ | 30 | 1, 2 |
| $2E_6 + A_5 + 2A_2$ | 6 | 1, 2, 3 |
| $2E_6 + A_3 + 3A_2$ | 12 | 1, 2, 3 |
| $2E_6 + 4A_2 + A_1$ | 2 | 1, 2, 3 |
| $E_6 + D_{14} + A_1$ | 6 | 1 |
| $E_6 + D_{11} + 2A_2$ | 12 | 1, 2 |
| $E_6 + D_{10} + A_5$ | 2 | 1 |
| $E_6 + D_9 + 3A_2$ | 4 | 2 |
| $E_6 + D_5 + A_9 + A_1$ | 60 | 1 |
| $E_6 + D_5 + A_6 + 2A_2$ | 84 | 1, 2 |
| $E_6 + D_5 + 2A_5$ | 12 | 1, 2 |
| $E_6 + D_5 + A_4 + 3A_2$ | 20 | 2 |
| $E_6 + A_{14} + A_1$ | 10 | 1 |
| $E_6 + A_{13} + 2A_1$ | 42 | 1 |
| $E_6 + A_{11} + 2A_2$ | 4 | 1, 2 |
| $E_6 + A_{11} + A_2 + 2A_1$ | 12 | 1, 2 |
| $E_6 + A_{10} + A_5$ | 22 | 1 |
| $E_6 + A_{10} + A_4 + A_1$ | 330 | 1 |
| $E_6 + A_{10} + 2A_2 + A_1$ | 66 | 1, 2 |
| $E_6 + A_9 + A_5 + A_1$ | 10 | 1 |
| $E_6 + A_9 + 3A_2$ | 10 | 2 |
| $E_6 + A_8 + 3A_2 + A_1$ | 18 | 1, 2, 3 |
| $E_6 + A_7 + A_5 + A_2 + A_1$ | 24 | 1, 2 |
| $E_6 + A_7 + A_4 + 2A_2$ | 120 | 1, 2 |
| $E_6 + A_6 + A_5 + A_4$ | 70 | 1 |
| $E_6 + A_6 + 4A_2 + A_1$ | 42 | 1, 2, 3 |
| $E_6 + 2A_5 + A_3 + A_2$ | 4 | 1, 2 |
| $E_6 + A_5 + A_4 + 3A_2$ | 30 | 1, 2, 3 |
| $E_6 + A_5 + 5A_2$ | 6 | 1, 2, 3, 4 |
| $E_6 + A_3 + 6A_2$ | 12 | 1, 2, 3, 4 |
| $E_6 + 7A_2 + A_1$ | 2 | 2, 3, 4 |
| $D_{19} + A_2$ | 12 | 1 |
| $D_{17} + 2A_2$ | 4 | 1 |
| $D_{16} + A_5$ | 6 | 1 |
| $D_{16} + A_3 + A_2$ | 12 | 1 |
| $D_{16} + 2A_2 + A_1$ | 2 | 1 |
| $D_{14} + A_4 + A_2 + A_1$ | 30 | 1 |

| $p = 3$ | | |
|---|---|---|
| $R$ | $n$ | $\sigma$ |
| $D_{14} + 3A_2 + A_1$ | 6 | 1, 2 |
| $D_{13} + A_6 + A_2$ | 84 | 1 |
| $D_{13} + A_4 + 2A_2$ | 20 | 1 |
| $D_{12} + D_7 + A_2$ | 12 | 1 |
| $D_{12} + D_5 + 2A_2$ | 4 | 1 |
| $D_{11} + 2A_5$ | 4 | 1 |
| $D_{11} + 5A_2$ | 12 | 2, 3 |
| $D_{10} + D_6 + A_5$ | 6 | 1 |
| $D_{10} + A_{11}$ | 12 | 1 |
| $D_{10} + A_6 + A_5$ | 42 | 1 |
| $D_{10} + 2A_5 + A_1$ | 2 | 1 |
| $D_{10} + A_5 + 3A_2$ | 2 | 2 |
| $D_9 + 6A_2$ | 4 | 2, 3 |
| $2D_8 + A_3 + A_2$ | 12 | 1 |
| $D_8 + A_{11} + A_2$ | 4 | 1 |
| $D_8 + A_7 + A_5 + A_1$ | 24 | 1 |
| $D_8 + A_7 + A_4 + A_2$ | 120 | 1 |
| $D_8 + 2A_5 + A_2 + A_1$ | 6 | 1, 2 |
| $D_7 + A_{14}$ | 60 | 1 |
| $D_7 + A_{12} + A_2$ | 156 | 1 |
| $D_7 + A_{11} + A_3$ | 12 | 1 |
| $D_7 + A_{11} + A_2 + A_1$ | 2 | 1 |
| $D_7 + A_9 + A_5$ | 60 | 1 |
| $D_7 + 2A_5 + A_4$ | 20 | 1 |
| $D_6 + D_5 + 2A_5$ | 4 | 1 |
| $2D_5 + A_7 + 2A_2$ | 8 | 1 |
| $D_5 + A_{13} + A_2 + A_1$ | 84 | 1 |
| $D_5 + A_{12} + 2A_2$ | 52 | 1 |
| $D_5 + A_{11} + A_4 + A_1$ | 30 | 1 |
| $D_5 + A_{11} + A_3 + A_2$ | 4 | 1 |
| $D_5 + A_{11} + 2A_2 + A_1$ | 6 | 1, 2 |
| $D_5 + A_9 + 3A_2 + A_1$ | 60 | 1, 2 |
| $D_5 + A_8 + A_4 + 2A_2$ | 180 | 1, 2 |
| $D_5 + 2A_7 + A_2$ | 12 | 1 |
| $D_5 + A_6 + 5A_2$ | 84 | 2, 3 |
| $D_5 + 2A_5 + 3A_2$ | 12 | 1, 2, 3 |
| $D_5 + A_4 + 6A_2$ | 20 | 2, 3 |
| $D_4 + A_{15} + A_2$ | 12 | 1 |
| $D_4 + A_{11} + A_6$ | 84 | 1 |
| $D_4 + A_{11} + A_4 + A_2$ | 20 | 1 |
| $D_4 + 3A_5 + A_2$ | 2 | 1, 2 |
| $A_{17} + 2A_2$ | 2 | 1 |
| $A_{16} + 2A_2 + A_1$ | 34 | 1 |
| $A_{15} + 2A_2 + 2A_1$ | 4 | 1 |
| $A_{14} + 3A_2 + A_1$ | 10 | 1, 2 |
| $A_{13} + A_4 + 2A_2$ | 70 | 1 |
| $A_{13} + 3A_2 + 2A_1$ | 42 | 1, 2 |
| $A_{12} + A_4 + 2A_2 + A_1$ | 130 | 1 |
| $A_{11} + 5A_2$ | 4 | 2, 3 |
| $A_{11} + 4A_2 + 2A_1$ | 12 | 1, 2, 3 |

| $p=3$ | | |
|---|---|---|
| $R$ | $n$ | $\sigma$ |
| $A_{10}+A_5+3A_2$ | 22 | 2 |
| $A_{10}+A_4+3A_2+A_1$ | 330 | 1, 2 |
| $A_{10}+5A_2+A_1$ | 66 | 2, 3 |
| $A_9+A_5+3A_2+A_1$ | 10 | 2 |
| $A_9+2A_4+2A_2$ | 10 | 1 |
| $A_9+6A_2$ | 10 | 2, 3 |
| $A_8+6A_2+A_1$ | 18 | 1, 2, 3, 4 |
| $A_7+A_5+4A_2+A_1$ | 24 | 1, 2, 3 |

| $p=3$ | | |
|---|---|---|
| $R$ | $n$ | $\sigma$ |
| $A_7+A_4+5A_2$ | 120 | 2, 3 |
| $A_6+A_5+A_4+3A_2$ | 70 | 2 |
| $A_6+7A_2+A_1$ | 42 | 2, 3, 4 |
| $2A_5+A_3+4A_2$ | 4 | 1, 2, 3 |
| $A_5+A_4+6A_2$ | 30 | 1, 2, 3, 4 |
| $A_5+8A_2$ | 6 | 1, 2, 3, 4, 5 |
| $A_3+9A_2$ | 12 | 1, 2, 3, 4, 5 |
| $10A_2+A_1$ | 2 | 1, 2, 3, 4, 5 |

| $p=2$ | | |
|---|---|---|
| $R$ | $n$ | $\sigma$ |
| $2E_8+D_5$ | 4 | 1 |
| $2E_8+D_4+A_1$ | 2 | 1 |
| $2E_8+A_2+3A_1$ | 6 | 1 |
| $2E_8+5A_1$ | 2 | 2 |
| $E_8+E_7+D_6$ | 2 | 1 |
| $E_8+E_7+D_4+A_2$ | 6 | 1 |
| $E_8+E_7+D_4+2A_1$ | 2 | 2 |
| $E_8+E_7+A_3+3A_1$ | 4 | 1, 2 |
| $E_8+E_7+A_2+4A_1$ | 6 | 2 |
| $E_8+E_7+6A_1$ | 2 | 2, 3 |
| $E_8+E_6+D_7$ | 12 | 1 |
| $E_8+E_6+D_4+A_3$ | 12 | 1, 2 |
| $E_8+E_6+A_4+3A_1$ | 30 | 1 |
| $E_8+D_{13}$ | 4 | 1 |
| $E_8+D_{12}+A_1$ | 2 | 1 |
| $E_8+D_{10}+A_2+A_1$ | 6 | 1 |
| $E_8+D_{10}+3A_1$ | 2 | 1, 2 |
| $E_8+D_9+D_4$ | 4 | 1, 2 |
| $E_8+D_9+A_4$ | 20 | 1 |
| $E_8+D_8+D_5$ | 4 | 1, 2 |
| $E_8+D_8+D_4+A_1$ | 2 | 2 |
| $E_8+D_8+A_2+3A_1$ | 6 | 2 |
| $E_8+D_8+5A_1$ | 2 | 2, 3 |
| $E_8+D_7+6A_1$ | 4 | 2, 3 |
| $E_8+2D_6+A_1$ | 2 | 2 |
| $E_8+D_6+D_4+A_2+A_1$ | 6 | 2 |
| $E_8+D_6+D_4+3A_1$ | 2 | 2, 3 |
| $E_8+D_6+A_3+4A_1$ | 4 | 2, 3 |
| $E_8+D_6+A_2+5A_1$ | 6 | 2, 3 |
| $E_8+D_6+7A_1$ | 2 | 3, 4 |
| $E_8+D_5+2D_4$ | 4 | 2, 3 |
| $E_8+D_5+D_4+A_4$ | 20 | 1, 2 |
| $E_8+D_5+A_5+3A_1$ | 12 | 1, 2 |
| $E_8+D_5+8A_1$ | 4 | 3, 4 |
| $E_8+3D_4+A_1$ | 2 | 3 |
| $E_8+2D_4+A_2+3A_1$ | 6 | 3 |
| $E_8+2D_4+5A_1$ | 2 | 3, 4 |
| $E_8+D_4+A_9$ | 10 | 1 |

| $p=2$ | | |
|---|---|---|
| $R$ | $n$ | $\sigma$ |
| $E_8+D_4+A_8+A_1$ | 18 | 1 |
| $E_8+D_4+A_6+A_2+A_1$ | 42 | 1 |
| $E_8+D_4+A_5+A_4$ | 30 | 1 |
| $E_8+D_4+A_3+6A_1$ | 4 | 3, 4 |
| $E_8+D_4+A_2+7A_1$ | 6 | 3, 4 |
| $E_8+D_4+9A_1$ | 2 | 3, 4, 5 |
| $E_8+A_{10}+3A_1$ | 22 | 1 |
| $E_8+A_9+4A_1$ | 10 | 1, 2 |
| $E_8+A_8+5A_1$ | 18 | 2 |
| $E_8+A_7+A_2+4A_1$ | 24 | 1, 2 |
| $E_8+A_6+A_4+3A_1$ | 70 | 1 |
| $E_8+A_6+A_2+5A_1$ | 42 | 2 |
| $E_8+A_5+A_4+4A_1$ | 30 | 2 |
| $E_8+A_5+A_3+5A_1$ | 12 | 2, 3 |
| $E_8+A_4+A_3+6A_1$ | 20 | 2, 3 |
| $E_8+A_3+10A_1$ | 4 | 4, 5 |
| $E_8+A_2+11A_1$ | 6 | 4, 5 |
| $E_8+13A_1$ | 2 | 4, 5, 6 |
| $3E_7$ | 2 | 1 |
| $2E_7+D_7$ | 4 | 1 |
| $2E_7+D_6+A_1$ | 2 | 1, 2 |
| $2E_7+D_5+2A_1$ | 4 | 1, 2 |
| $2E_7+D_4+A_3$ | 4 | 1, 2 |
| $2E_7+D_4+A_2+A_1$ | 6 | 1, 2 |
| $2E_7+D_4+3A_1$ | 2 | 1, 2, 3 |
| $2E_7+A_4+A_3$ | 20 | 1 |
| $2E_7+A_3+4A_1$ | 4 | 2, 3 |
| $2E_7+A_2+5A_1$ | 6 | 2, 3 |
| $2E_7+7A_1$ | 2 | 2, 3, 4 |
| $E_7+E_6+D_5+3A_1$ | 12 | 1, 2 |
| $E_7+E_6+D_4+A_4$ | 30 | 1 |
| $E_7+E_6+A_4+4A_1$ | 30 | 2 |
| $E_7+E_6+A_3+5A_1$ | 12 | 2, 3 |
| $E_7+D_{14}$ | 2 | 1 |
| $E_7+D_{12}+A_2$ | 6 | 1 |
| $E_7+D_{12}+2A_1$ | 2 | 1, 2 |
| $E_7+D_{11}+3A_1$ | 4 | 1, 2 |
| $E_7+D_{10}+D_4$ | 2 | 1, 2 |

| $p=2$ | | |
|---|---|---|
| $R$ | $n$ | $\sigma$ |
| $E_7+D_{10}+A_3+A_1$ | 4 | 1, 2 |
| $E_7+D_{10}+A_2+2A_1$ | 6 | 1, 2 |
| $E_7+D_{10}+4A_1$ | 2 | 1, 2, 3 |
| $E_7+D_9+A_5$ | 12 | 1 |
| $E_7+D_9+5A_1$ | 4 | 2, 3 |
| $E_7+D_8+D_6$ | 2 | 1, 2 |
| $E_7+D_8+D_4+A_2$ | 6 | 2 |
| $E_7+D_8+D_4+2A_1$ | 2 | 1, 2, 3 |
| $E_7+D_8+A_3+3A_1$ | 4 | 1, 2, 3 |
| $E_7+D_8+A_2+4A_1$ | 6 | 1, 2, 3 |
| $E_7+D_8+6A_1$ | 2 | 2, 3, 4 |
| $E_7+D_7+D_6+A_1$ | 4 | 1, 2 |
| $E_7+D_7+D_4+3A_1$ | 4 | 2, 3 |
| $E_7+D_7+A_5+2A_1$ | 12 | 1, 2 |
| $E_7+D_7+A_4+3A_1$ | 20 | 1, 2 |
| $E_7+D_7+7A_1$ | 4 | 3, 4 |
| $E_7+2D_6+A_2$ | 6 | 1, 2 |
| $E_7+2D_6+2A_1$ | 2 | 1, 2, 3 |
| $E_7+D_6+D_5+3A_1$ | 4 | 1, 2, 3 |
| $E_7+D_6+2D_4$ | 2 | 2, 3 |
| $E_7+D_6+D_4+A_3+A_1$ | 4 | 1, 2, 3 |
| $E_7+D_6+D_4+A_2+2A_1$ | 6 | 2, 3 |
| $E_7+D_6+D_4+4A_1$ | 2 | 2, 3, 4 |
| $E_7+D_6+A_8$ | 18 | 1 |
| $E_7+D_6+A_6+A_2$ | 42 | 1 |
| $E_7+D_6+A_5+A_3$ | 12 | 1, 2 |
| $E_7+D_6+A_4+A_3+A_1$ | 20 | 1, 2 |
| $E_7+D_6+A_3+5A_1$ | 4 | 2, 3, 4 |
| $E_7+D_6+A_2+6A_1$ | 6 | 2, 3, 4 |
| $E_7+D_6+8A_1$ | 2 | 2, 3, 4, 5 |
| $E_7+D_5+D_4+A_5$ | 12 | 1, 2 |
| $E_7+D_5+D_4+5A_1$ | 4 | 2, 3, 4 |
| $E_7+D_5+A_5+4A_1$ | 12 | 2, 3 |
| $E_7+D_5+A_4+5A_1$ | 20 | 2, 3 |
| $E_7+D_5+9A_1$ | 4 | 3, 4, 5 |
| $E_7+3D_4+A_2$ | 6 | 3 |
| $E_7+3D_4+2A_1$ | 2 | 2, 3, 4 |
| $E_7+2D_4+A_3+3A_1$ | 4 | 2, 3, 4 |
| $E_7+2D_4+A_2+4A_1$ | 6 | 2, 3, 4 |
| $E_7+2D_4+6A_1$ | 2 | 2, 3, 4, 5 |
| $E_7+D_4+A_{10}$ | 22 | 1 |
| $E_7+D_4+A_9+A_1$ | 10 | 1, 2 |
| $E_7+D_4+A_8+2A_1$ | 18 | 2 |
| $E_7+D_4+A_7+A_2+A_1$ | 24 | 1, 2 |
| $E_7+D_4+A_6+A_4$ | 70 | 1 |
| $E_7+D_4+A_6+A_2+2A_1$ | 42 | 2 |
| $E_7+D_4+A_5+A_4+A_1$ | 30 | 1, 2 |
| $E_7+D_4+A_5+A_3+2A_1$ | 12 | 1, 2, 3 |
| $E_7+D_4+A_4+A_3+3A_1$ | 20 | 2, 3 |
| $E_7+D_4+A_3+7A_1$ | 4 | 2, 3, 4, 5 |

| $p=2$ | | |
|---|---|---|
| $R$ | $n$ | $\sigma$ |
| $E_7+D_4+A_2+8A_1$ | 6 | 3, 4, 5 |
| $E_7+D_4+10A_1$ | 2 | 3, 4, 5, 6 |
| $E_7+A_{11}+A_3$ | 6 | 1 |
| $E_7+A_{10}+4A_1$ | 22 | 2 |
| $E_7+A_9+A_3+A_2$ | 60 | 1 |
| $E_7+A_9+5A_1$ | 10 | 2, 3 |
| $E_7+A_8+6A_1$ | 18 | 2, 3 |
| $E_7+A_7+2A_3+A_1$ | 8 | 1, 2 |
| $E_7+A_7+A_2+5A_1$ | 24 | 2, 3 |
| $E_7+A_6+A_5+A_3$ | 84 | 1 |
| $E_7+A_6+A_4+4A_1$ | 70 | 2 |
| $E_7+A_6+A_2+6A_1$ | 42 | 2, 3 |
| $E_7+A_5+A_4+5A_1$ | 30 | 2, 3 |
| $E_7+A_5+A_3+6A_1$ | 12 | 2, 3, 4 |
| $E_7+A_4+A_3+7A_1$ | 20 | 3, 4 |
| $E_7+A_3+11A_1$ | 4 | 3, 4, 5, 6 |
| $E_7+A_2+12A_1$ | 6 | 3, 4, 5, 6 |
| $E_7+14A_1$ | 2 | 3, 4, 5, 6, 7 |
| $3E_6+3A_1$ | 6 | 1 |
| $2E_6+D_4+A_5$ | 6 | 1 |
| $2E_6+A_5+4A_1$ | 6 | 2 |
| $E_6+D_{15}$ | 12 | 1 |
| $E_6+D_{12}+A_3$ | 12 | 1, 2 |
| $E_6+D_{11}+D_4$ | 12 | 1, 2 |
| $E_6+D_{10}+A_4+A_1$ | 30 | 1 |
| $E_6+D_9+A_6$ | 84 | 1 |
| $E_6+D_9+6A_1$ | 12 | 2, 3 |
| $E_6+D_8+D_7$ | 12 | 1, 2 |
| $E_6+D_8+D_4+A_3$ | 12 | 1, 2, 3 |
| $E_6+D_8+A_4+3A_1$ | 30 | 2 |
| $E_6+D_7+2D_4$ | 12 | 2, 3 |
| $E_6+D_7+8A_1$ | 12 | 3, 4 |
| $E_6+D_6+D_5+4A_1$ | 12 | 2, 3 |
| $E_6+D_6+D_4+A_4+A_1$ | 30 | 2 |
| $E_6+D_6+A_4+5A_1$ | 30 | 2, 3 |
| $E_6+D_6+A_3+6A_1$ | 12 | 2, 3, 4 |
| $E_6+D_5+D_4+A_6$ | 84 | 1, 2 |
| $E_6+D_5+D_4+6A_1$ | 12 | 3, 4 |
| $E_6+D_5+10A_1$ | 12 | 4, 5 |
| $E_6+3D_4+A_3$ | 12 | 2, 3, 4 |
| $E_6+2D_4+A_4+3A_1$ | 30 | 3 |
| $E_6+D_4+A_{11}$ | 4 | 1, 2 |
| $E_6+D_4+A_{10}+A_1$ | 66 | 1 |
| $E_6+D_4+A_8+A_2+A_1$ | 18 | 1 |
| $E_6+D_4+A_7+A_4$ | 120 | 1, 2 |
| $E_6+D_4+2A_5+A_1$ | 6 | 1, 2 |
| $E_6+D_4+A_4+7A_1$ | 30 | 3, 4 |
| $E_6+D_4+A_3+8A_1$ | 12 | 3, 4, 5 |
| $E_6+A_{15}$ | 12 | 1 |
| $E_6+A_{12}+A_3$ | 156 | 1 |

| $p = 2$ | | |
|---|---|---|
| $R$ | $n$ | $\sigma$ |
| $E_6 + A_{11} + A_4$ | 20 | 1 |
| $E_6 + A_{11} + A_3 + A_1$ | 2 | 1 |
| $E_6 + A_{10} + 5A_1$ | 66 | 2 |
| $E_6 + A_8 + A_2 + 5A_1$ | 18 | 2 |
| $E_6 + A_6 + A_3 + 6A_1$ | 84 | 2,3 |
| $E_6 + 3A_5$ | 2 | 1 |
| $E_6 + 2A_5 + 5A_1$ | 6 | 2,3 |
| $E_6 + A_4 + 11A_1$ | 30 | 4,5 |
| $E_6 + A_3 + 12A_1$ | 12 | 4,5,6 |
| $D_{21}$ | 4 | 1 |
| $D_{20} + A_1$ | 2 | 1 |
| $D_{18} + A_2 + A_1$ | 6 | 1 |
| $D_{18} + 3A_1$ | 2 | 1,2 |
| $D_{17} + D_4$ | 4 | 1,2 |
| $D_{17} + A_4$ | 20 | 1 |
| $D_{16} + D_5$ | 4 | 1,2 |
| $D_{16} + D_4 + A_1$ | 2 | 1,2 |
| $D_{16} + A_2 + 3A_1$ | 6 | 1,2 |
| $D_{16} + 5A_1$ | 2 | 2,3 |
| $D_{15} + 6A_1$ | 4 | 2,3 |
| $D_{14} + D_6 + A_1$ | 2 | 1,2 |
| $D_{14} + D_4 + A_2 + A_1$ | 6 | 1,2 |
| $D_{14} + D_4 + 3A_1$ | 2 | 2,3 |
| $D_{14} + A_3 + 4A_1$ | 4 | 1,2,3 |
| $D_{14} + A_2 + 5A_1$ | 6 | 2,3 |
| $D_{14} + 7A_1$ | 2 | 2,3,4 |
| $D_{13} + D_8$ | 4 | 1,2 |
| $D_{13} + 2D_4$ | 4 | 2,3 |
| $D_{13} + D_4 + A_4$ | 20 | 1,2 |
| $D_{13} + A_5 + 3A_1$ | 12 | 1,2 |
| $D_{13} + 8A_1$ | 4 | 3,4 |
| $D_{12} + D_9$ | 4 | 1,2 |
| $D_{12} + D_8 + A_1$ | 2 | 1,2 |
| $D_{12} + D_6 + A_2 + A_1$ | 6 | 1,2 |
| $D_{12} + D_6 + 3A_1$ | 2 | 1,2,3 |
| $D_{12} + D_5 + D_4$ | 4 | 1,2,3 |
| $D_{12} + D_5 + A_4$ | 20 | 1,2 |
| $D_{12} + 2D_4 + A_1$ | 2 | 2,3 |
| $D_{12} + D_4 + A_2 + 3A_1$ | 6 | 2,3 |
| $D_{12} + D_4 + 5A_1$ | 2 | 2,3,4 |
| $D_{12} + A_9$ | 10 | 1 |
| $D_{12} + A_8 + A_1$ | 18 | 1 |
| $D_{12} + A_6 + A_2 + A_1$ | 42 | 1 |
| $D_{12} + A_5 + A_4$ | 30 | 1 |
| $D_{12} + A_3 + 6A_1$ | 4 | 2,3,4 |
| $D_{12} + A_2 + 7A_1$ | 6 | 2,3,4 |
| $D_{12} + 9A_1$ | 2 | 3,4,5 |
| $D_{11} + D_6 + 4A_1$ | 4 | 2,3 |
| $D_{11} + D_4 + 6A_1$ | 4 | 3,4 |
| $D_{11} + A_5 + 5A_1$ | 12 | 2,3 |

| $p = 2$ | | |
|---|---|---|
| $R$ | $n$ | $\sigma$ |
| $D_{11} + A_4 + 6A_1$ | 20 | 2,3 |
| $D_{11} + 10A_1$ | 4 | 4,5 |
| $2D_{10} + A_1$ | 2 | 1,2 |
| $D_{10} + D_8 + A_2 + A_1$ | 6 | 1,2 |
| $D_{10} + D_8 + 3A_1$ | 2 | 1,2,3 |
| $D_{10} + D_7 + 4A_1$ | 4 | 1,2,3 |
| $D_{10} + D_6 + D_4 + A_1$ | 2 | 1,2,3 |
| $D_{10} + D_6 + A_3 + 2A_1$ | 4 | 1,2,3 |
| $D_{10} + D_6 + A_2 + 3A_1$ | 6 | 1,2,3 |
| $D_{10} + D_6 + 5A_1$ | 2 | 2,3,4 |
| $D_{10} + D_5 + A_5 + A_1$ | 12 | 1,2 |
| $D_{10} + D_5 + 6A_1$ | 4 | 2,3,4 |
| $D_{10} + 2D_4 + A_2 + A_1$ | 6 | 2,3 |
| $D_{10} + 2D_4 + 3A_1$ | 2 | 2,3,4 |
| $D_{10} + D_4 + A_3 + 4A_1$ | 4 | 2,3,4 |
| $D_{10} + D_4 + A_2 + 5A_1$ | 6 | 2,3,4 |
| $D_{10} + D_4 + 7A_1$ | 2 | 2,3,4,5 |
| $D_{10} + A_{10} + A_1$ | 22 | 1 |
| $D_{10} + A_9 + 2A_1$ | 10 | 1,2 |
| $D_{10} + A_8 + 3A_1$ | 18 | 1,2 |
| $D_{10} + A_7 + A_2 + 2A_1$ | 24 | 1,2 |
| $D_{10} + A_6 + A_4 + A_1$ | 70 | 1 |
| $D_{10} + A_6 + A_2 + 3A_1$ | 42 | 1,2 |
| $D_{10} + A_5 + A_4 + 2A_1$ | 30 | 1,2 |
| $D_{10} + A_5 + A_3 + 3A_1$ | 12 | 1,2,3 |
| $D_{10} + A_4 + A_3 + 4A_1$ | 20 | 1,2,3 |
| $D_{10} + A_3 + 8A_1$ | 4 | 3,4,5 |
| $D_{10} + A_2 + 9A_1$ | 6 | 3,4,5 |
| $D_{10} + 11A_1$ | 2 | 3,4,5,6 |
| $D_9 + D_8 + D_4$ | 4 | 1,2,3 |
| $D_9 + D_8 + A_4$ | 20 | 1,2 |
| $D_9 + D_6 + A_5 + A_1$ | 12 | 1,2 |
| $D_9 + D_6 + 6A_1$ | 4 | 2,3,4 |
| $D_9 + D_5 + A_7$ | 8 | 1,2 |
| $D_9 + 3D_4$ | 4 | 2,3,4 |
| $D_9 + 2D_4 + A_4$ | 20 | 2,3 |
| $D_9 + D_4 + A_5 + 3A_1$ | 12 | 2,3 |
| $D_9 + D_4 + 8A_1$ | 4 | 3,4,5 |
| $D_9 + A_{12}$ | 52 | 1 |
| $D_9 + A_{11} + A_1$ | 6 | 1 |
| $D_9 + A_9 + A_2 + A_1$ | 60 | 1 |
| $D_9 + A_8 + A_4$ | 180 | 1 |
| $D_9 + A_5 + 7A_1$ | 12 | 3,4 |
| $D_9 + A_4 + 8A_1$ | 20 | 3,4 |
| $D_9 + 12A_1$ | 4 | 4,5,6 |
| $2D_8 + D_5$ | 4 | 1,2,3 |
| $2D_8 + D_4 + A_1$ | 2 | 1,2,3 |
| $2D_8 + A_2 + 3A_1$ | 6 | 1,2,3 |
| $2D_8 + 5A_1$ | 2 | 1,2,3,4 |
| $D_8 + D_7 + 6A_1$ | 4 | 2,3,4 |

| $p=2$ | | |
|---|---|---|
| $R$ | $n$ | $\sigma$ |
| $D_8+2D_6+A_1$ | 2 | 1,2,3 |
| $D_8+D_6+D_4+A_2+A_1$ | 6 | 1,2,3 |
| $D_8+D_6+D_4+3A_1$ | 2 | 1,2,3,4 |
| $D_8+D_6+A_3+4A_1$ | 4 | 1,2,3,4 |
| $D_8+D_6+A_2+5A_1$ | 6 | 2,3,4 |
| $D_8+D_6+7A_1$ | 2 | 2,3,4,5 |
| $D_8+D_5+2D_4$ | 4 | 1,2,3,4 |
| $D_8+D_5+D_4+A_4$ | 20 | 1,2,3 |
| $D_8+D_5+A_5+3A_1$ | 12 | 1,2,3 |
| $D_8+D_5+8A_1$ | 4 | 2,3,4,5 |
| $D_8+3D_4+A_1$ | 2 | 2,3,4 |
| $D_8+2D_4+A_2+3A_1$ | 6 | 2,3,4 |
| $D_8+2D_4+5A_1$ | 2 | 2,3,4,5 |
| $D_8+D_4+A_9$ | 10 | 2 |
| $D_8+D_4+A_8+A_1$ | 18 | 2 |
| $D_8+D_4+A_6+A_2+A_1$ | 42 | 2 |
| $D_8+D_4+A_5+A_4$ | 30 | 2 |
| $D_8+D_4+A_3+6A_1$ | 4 | 2,3,4,5 |
| $D_8+D_4+A_2+7A_1$ | 6 | 2,3,4,5 |
| $D_8+D_4+9A_1$ | 2 | 2,3,4,5,6 |
| $D_8+A_{10}+3A_1$ | 22 | 2 |
| $D_8+A_9+4A_1$ | 10 | 1,2,3 |
| $D_8+A_8+5A_1$ | 18 | 2,3 |
| $D_8+A_7+A_2+4A_1$ | 24 | 1,2,3 |
| $D_8+A_6+A_4+3A_1$ | 70 | 2 |
| $D_8+A_6+A_2+5A_1$ | 42 | 2,3 |
| $D_8+A_5+A_4+4A_1$ | 30 | 1,2,3 |
| $D_8+A_5+A_3+5A_1$ | 12 | 1,2,3,4 |
| $D_8+A_4+A_3+6A_1$ | 20 | 2,3,4 |
| $D_8+A_3+10A_1$ | 4 | 3,4,5,6 |
| $D_8+A_2+11A_1$ | 6 | 3,4,5,6 |
| $D_8+13A_1$ | 2 | 3,4,5,6,7 |
| $D_7+2D_6+2A_1$ | 4 | 1,2,3 |
| $D_7+D_6+D_4+4A_1$ | 4 | 2,3,4 |
| $D_7+D_6+A_5+3A_1$ | 12 | 1,2,3 |
| $D_7+D_6+A_4+4A_1$ | 20 | 2,3 |
| $D_7+D_6+8A_1$ | 4 | 3,4,5 |
| $D_7+2D_4+6A_1$ | 4 | 2,3,4,5 |
| $D_7+D_4+A_5+5A_1$ | 12 | 2,3,4 |
| $D_7+D_4+A_4+6A_1$ | 20 | 3,4 |
| $D_7+D_4+10A_1$ | 4 | 3,4,5,6 |
| $D_7+A_{11}+3A_1$ | 6 | 1,2 |
| $D_7+A_9+A_2+3A_1$ | 60 | 1,2 |
| $D_7+A_7+A_3+4A_1$ | 8 | 1,2,3 |
| $D_7+A_6+A_5+3A_1$ | 84 | 1,2 |
| $D_7+A_5+9A_1$ | 12 | 3,4,5 |
| $D_7+A_4+10A_1$ | 20 | 4,5 |
| $D_7+14A_1$ | 4 | 3,4,5,6,7 |
| $3D_6+A_3$ | 4 | 1,2,3 |
| $3D_6+A_2+A_1$ | 6 | 1,2,3 |

| $p=2$ | | |
|---|---|---|
| $R$ | $n$ | $\sigma$ |
| $3D_6+3A_1$ | 2 | 1,2,3,4 |
| $2D_6+D_5+4A_1$ | 4 | 1,2,3,4 |
| $2D_6+2D_4+A_1$ | 2 | 1,2,3,4 |
| $2D_6+D_4+A_3+2A_1$ | 4 | 1,2,3,4 |
| $2D_6+D_4+A_2+3A_1$ | 6 | 1,2,3,4 |
| $2D_6+D_4+5A_1$ | 2 | 1,2,3,4,5 |
| $2D_6+A_9$ | 10 | 1,2 |
| $2D_6+A_8+A_1$ | 18 | 2 |
| $2D_6+A_7+A_2$ | 24 | 1,2 |
| $2D_6+A_6+A_2+A_1$ | 42 | 2 |
| $2D_6+A_5+A_4$ | 30 | 1,2 |
| $2D_6+A_5+A_3+A_1$ | 12 | 1,2,3 |
| $2D_6+A_4+A_3+2A_1$ | 20 | 1,2,3 |
| $2D_6+A_3+6A_1$ | 4 | 2,3,4,5 |
| $2D_6+A_2+7A_1$ | 6 | 2,3,4,5 |
| $2D_6+9A_1$ | 2 | 2,3,4,5,6 |
| $D_6+D_5+D_4+A_5+A_1$ | 12 | 1,2,3 |
| $D_6+D_5+D_4+6A_1$ | 4 | 2,3,4,5 |
| $D_6+D_5+A_5+5A_1$ | 12 | 2,3,4 |
| $D_6+D_5+A_4+6A_1$ | 20 | 2,3,4 |
| $D_6+D_5+10A_1$ | 4 | 3,4,5,6 |
| $D_6+3D_4+A_2+A_1$ | 6 | 2,3,4 |
| $D_6+3D_4+3A_1$ | 2 | 1,2,3,4,5 |
| $D_6+2D_4+A_3+4A_1$ | 4 | 1,2,3,4,5 |
| $D_6+2D_4+A_2+5A_1$ | 6 | 2,3,4,5 |
| $D_6+2D_4+7A_1$ | 2 | 2,3,4,5,6 |
| $D_6+D_4+A_{10}+A_1$ | 22 | 2 |
| $D_6+D_4+A_9+2A_1$ | 10 | 2,3 |
| $D_6+D_4+A_8+3A_1$ | 18 | 2,3 |
| $D_6+D_4+A_7+A_2+2A_1$ | 24 | 2,3 |
| $D_6+D_4+A_6+A_4+A_1$ | 70 | 2 |
| $D_6+D_4+A_6+A_2+3A_1$ | 42 | 2,3 |
| $D_6+D_4+A_5+A_4+2A_1$ | 30 | 2,3 |
| $D_6+D_4+A_5+A_3+3A_1$ | 12 | 1,2,3,4 |
| $D_6+D_4+A_4+A_3+4A_1$ | 20 | 2,3,4 |
| $D_6+D_4+A_3+8A_1$ | 4 | 2,3,4,5,6 |
| $D_6+D_4+A_2+9A_1$ | 6 | 2,3,4,5,6 |
| $D_6+D_4+11A_1$ | 2 | 2,3,4,5,6,7 |
| $D_6+A_{15}$ | 4 | 1 |
| $D_6+A_{13}+A_2$ | 42 | 1 |
| $D_6+A_{11}+A_3+A_1$ | 6 | 1,2 |
| $D_6+A_{11}+2A_2$ | 12 | 1 |
| $D_6+A_{10}+A_5$ | 66 | 1 |
| $D_6+A_{10}+5A_1$ | 22 | 2,3 |
| $D_6+A_9+A_3+A_2+A_1$ | 60 | 1,2 |
| $D_6+A_9+6A_1$ | 10 | 2,3,4 |
| $D_6+A_8+A_5+A_2$ | 18 | 1 |
| $D_6+A_8+7A_1$ | 18 | 3,4 |
| $D_6+A_7+2A_3+2A_1$ | 8 | 1,2,3 |

| $p = 2$ | | |
|---|---|---|
| $R$ | $n$ | $\sigma$ |
| $D_6 + A_7 + A_2 + 6A_1$ | 24 | 2, 3, 4 |
| $D_6 + A_6 + A_5 + A_3 + A_1$ | 84 | 1, 2 |
| $D_6 + A_6 + A_4 + 5A_1$ | 70 | 2, 3 |
| $D_6 + A_6 + A_2 + 7A_1$ | 42 | 3, 4 |
| $D_6 + 3A_5$ | 6 | 1, 2 |
| $D_6 + A_5 + A_4 + 6A_1$ | 30 | 2, 3, 4 |
| $D_6 + A_5 + A_3 + 7A_1$ | 12 | 2, 3, 4, 5 |
| $D_6 + A_4 + A_3 + 8A_1$ | 20 | 3, 4, 5 |
| $D_6 + A_3 + 12A_1$ | 4 | 2, 3, 4, 5, 6, 7 |
| $D_6 + A_2 + 13A_1$ | 6 | 3, 4, 5, 6, 7 |
| $D_6 + 15A_1$ | 2 | 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 |
| $2D_5 + D_4 + A_7$ | 8 | 1, 2, 3 |
| $D_5 + 4D_4$ | 4 | 1, 2, 3, 4, 5 |
| $D_5 + 3D_4 + A_4$ | 20 | 2, 3, 4 |
| $D_5 + 2D_4 + A_5 + 3A_1$ | 12 | 2, 3, 4 |
| $D_5 + 2D_4 + 8A_1$ | 4 | 2, 3, 4, 5, 6 |
| $D_5 + D_4 + A_{12}$ | 52 | 1, 2 |
| $D_5 + D_4 + A_{11} + A_1$ | 6 | 1, 2 |
| $D_5 + D_4 + A_9 + A_2 + A_1$ | 60 | 1, 2 |
| $D_5 + D_4 + A_8 + A_4$ | 180 | 1, 2 |
| $D_5 + D_4 + A_5 + 7A_1$ | 12 | 2, 3, 4, 5 |
| $D_5 + D_4 + A_4 + 8A_1$ | 20 | 3, 4, 5 |
| $D_5 + D_4 + 12A_1$ | 4 | 3, 4, 5, 6, 7 |
| $D_5 + A_{16}$ | 68 | 1 |
| $D_5 + A_{15} + A_1$ | 2 | 1 |
| $D_5 + A_{11} + A_5$ | 2 | 1 |
| $D_5 + A_{11} + 5A_1$ | 6 | 2, 3 |
| $D_5 + A_9 + A_6 + A_1$ | 140 | 1 |
| $D_5 + A_9 + A_2 + 5A_1$ | 60 | 2, 3 |
| $D_5 + 2A_8$ | 36 | 1 |
| $D_5 + 2A_7 + 2A_1$ | 4 | 1, 2 |
| $D_5 + A_7 + A_3 + 6A_1$ | 8 | 2, 3, 4 |
| $D_5 + A_6 + A_5 + 5A_1$ | 84 | 2, 3 |
| $D_5 + A_5 + 11A_1$ | 12 | 3, 4, 5, 6 |
| $D_5 + A_4 + 12A_1$ | 20 | 4, 5, 6 |
| $D_5 + 16A_1$ | 4 | 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 |
| $5D_4 + A_1$ | 2 | 1, 2, 3, 4, 5 |
| $4D_4 + A_2 + 3A_1$ | 6 | 1, 2, 3, 4, 5 |
| $4D_4 + 5A_1$ | 2 | 1, 2, 3, 4, 5, 6 |
| $3D_4 + A_9$ | 10 | 3 |
| $3D_4 + A_8 + A_1$ | 18 | 3 |
| $3D_4 + A_6 + A_2 + A_1$ | 42 | 3 |
| $3D_4 + A_5 + A_4$ | 30 | 3 |
| $3D_4 + A_3 + 6A_1$ | 4 | 1, 2, 3, 4, 5, 6 |
| $3D_4 + A_2 + 7A_1$ | 6 | 2, 3, 4, 5, 6 |

| $p = 2$ | | |
|---|---|---|
| $R$ | $n$ | $\sigma$ |
| $3D_4 + 9A_1$ | 2 | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 |
| $2D_4 + A_{10} + 3A_1$ | 22 | 3 |
| $2D_4 + A_9 + 4A_1$ | 10 | 2, 3, 4 |
| $2D_4 + A_8 + 5A_1$ | 18 | 3, 4 |
| $2D_4 + A_7 + A_2 + 4A_1$ | 24 | 2, 3, 4 |
| $2D_4 + A_6 + A_4 + 3A_1$ | 70 | 3 |
| $2D_4 + A_6 + A_2 + 5A_1$ | 42 | 3, 4 |
| $2D_4 + A_5 + A_4 + 4A_1$ | 30 | 2, 3, 4 |
| $2D_4 + A_5 + A_3 + 5A_1$ | 12 | 2, 3, 4, 5 |
| $2D_4 + A_4 + A_3 + 6A_1$ | 20 | 2, 3, 4, 5 |
| $2D_4 + A_3 + 10A_1$ | 4 | 2, 3, 4, 5, 6, 7 |
| $2D_4 + A_2 + 11A_1$ | 6 | 2, 3, 4, 5, 6, 7 |
| $2D_4 + 13A_1$ | 2 | 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 |
| $D_4 + A_{17}$ | 2 | 1 |
| $D_4 + A_{16} + A_1$ | 34 | 1 |
| $D_4 + A_{15} + 2A_1$ | 4 | 1, 2 |
| $D_4 + A_{14} + A_2 + A_1$ | 10 | 1 |
| $D_4 + A_{13} + A_4$ | 70 | 1 |
| $D_4 + A_{13} + A_2 + 2A_1$ | 42 | 1, 2 |
| $D_4 + A_{12} + A_4 + A_1$ | 130 | 1 |
| $D_4 + A_{11} + A_3 + 3A_1$ | 6 | 2, 3 |
| $D_4 + A_{11} + 2A_2 + 2A_1$ | 12 | 1, 2 |
| $D_4 + A_{10} + A_5 + 2A_1$ | 66 | 2 |
| $D_4 + A_{10} + A_4 + A_2 + A_1$ | 330 | 1 |
| $D_4 + A_{10} + 7A_1$ | 22 | 3, 4 |
| $D_4 + A_9 + 2A_4$ | 10 | 1 |
| $D_4 + A_9 + A_3 + A_2 + 3A_1$ | 60 | 2, 3 |
| $D_4 + A_9 + 8A_1$ | 10 | 3, 4, 5 |
| $D_4 + A_8 + A_5 + A_2 + 2A_1$ | 18 | 2 |
| $D_4 + A_8 + 9A_1$ | 18 | 3, 4, 5 |
| $D_4 + A_7 + 2A_3 + 4A_1$ | 8 | 2, 3, 4 |
| $D_4 + A_7 + A_2 + 8A_1$ | 24 | 3, 4, 5 |
| $D_4 + A_6 + A_5 + A_3 + 3A_1$ | 84 | 2, 3 |
| $D_4 + A_6 + A_4 + 7A_1$ | 70 | 3, 4 |
| $D_4 + A_6 + A_2 + 9A_1$ | 42 | 3, 4, 5 |
| $D_4 + 3A_5 + 2A_1$ | 6 | 1, 2, 3 |
| $D_4 + A_5 + A_4 + 8A_1$ | 30 | 3, 4, 5 |
| $D_4 + A_5 + A_3 + 9A_1$ | 12 | 2, 3, 4, 5, 6 |
| $D_4 + A_4 + A_3 + 10A_1$ | 20 | 3, 4, 5, 6 |
| $D_4 + A_3 + 14A_1$ | 4 | 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 |
| $D_4 + A_2 + 15A_1$ | 6 | 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 |
| $D_4 + 17A_1$ | 2 | 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 |
| $A_{19} + 2A_1$ | 20 | 1 |

| $p=2$ | | |
|---|---|---|
| $R$ | $n$ | $\sigma$ |
| $A_{18}+3A_1$ | 38 | 1 |
| $A_{17}+A_3+A_1$ | 36 | 1 |
| $A_{17}+A_3+A_1$ | 4 | 1 |
| $A_{17}+A_2+2A_1$ | 6 | 1 |
| $A_{17}+4A_1$ | 2 | 1, 2 |
| $A_{16}+5A_1$ | 34 | 2 |
| $A_{15}+A_4+2A_1$ | 20 | 1 |
| $A_{15}+A_3+A_2+A_1$ | 6 | 1 |
| $A_{15}+A_3+3A_1$ | 2 | 1, 2 |
| $A_{15}+6A_1$ | 4 | 2, 3 |
| $A_{14}+A_3+2A_2$ | 60 | 1 |
| $A_{14}+A_2+5A_1$ | 10 | 2 |
| $A_{13}+A_5+A_3$ | 84 | 1 |
| $A_{13}+A_4+4A_1$ | 70 | 1, 2 |
| $A_{13}+A_2+6A_1$ | 42 | 2, 3 |
| $A_{12}+A_6+3A_1$ | 182 | 1 |
| $A_{12}+A_4+5A_1$ | 130 | 2 |
| $A_{12}+A_3+6A_1$ | 52 | 2, 3 |
| $A_{11}+A_9+A_1$ | 60 | 1 |
| $A_{11}+A_6+A_3+A_1$ | 42 | 1 |
| $A_{11}+A_6+2A_2$ | 84 | 1 |
| $A_{11}+2A_5$ | 12 | 1 |
| $A_{11}+A_5+A_3+A_2$ | 6 | 1 |
| $A_{11}+A_5+A_3+2A_1$ | 2 | 1, 2 |
| $A_{11}+A_5+5A_1$ | 4 | 1, 2, 3 |
| $A_{11}+2A_3+2A_2$ | 12 | 1, 2 |
| $A_{11}+A_3+7A_1$ | 6 | 2, 3, 4 |
| $A_{11}+2A_2+6A_1$ | 12 | 2, 3 |
| $A_{10}+A_9+2A_1$ | 110 | 1 |
| $A_{10}+A_7+4A_1$ | 88 | 1, 2 |
| $A_{10}+A_6+A_3+A_2$ | 924 | 1 |
| $A_{10}+A_5+6A_1$ | 66 | 2, 3 |
| $A_{10}+A_4+A_2+5A_1$ | 330 | 2 |
| $A_{10}+11A_1$ | 22 | 4, 5 |
| $2A_9+A_3$ | 4 | 1 |

| $p=2$ | | |
|---|---|---|
| $R$ | $n$ | $\sigma$ |
| $2A_9+A_2+A_1$ | 6 | 1 |
| $2A_9+3A_1$ | 2 | 1, 2 |
| $A_9+A_6+A_3+3A_1$ | 140 | 1, 2 |
| $A_9+2A_4+4A_1$ | 10 | 1, 2 |
| $A_9+A_3+A_2+7A_1$ | 60 | 2, 3, 4 |
| $A_9+12A_1$ | 10 | 3, 4, 5, 6 |
| $A_8+A_5+A_2+6A_1$ | 18 | 2, 3 |
| $A_8+A_4+A_3+6A_1$ | 180 | 2, 3 |
| $A_8+13A_1$ | 18 | 4, 5, 6 |
| $2A_7+2A_3+A_1$ | 2 | 1, 2 |
| $2A_7+A_3+4A_1$ | 4 | 1, 2, 3 |
| $A_7+A_6+A_4+4A_1$ | 280 | 1, 2 |
| $A_7+A_6+2A_3+A_2$ | 168 | 1, 2 |
| $A_7+A_5+A_4+5A_1$ | 120 | 1, 2, 3 |
| $A_7+4A_3+A_2$ | 24 | 1, 2, 3 |
| $A_7+2A_3+8A_1$ | 8 | 3, 4, 5 |
| $A_7+A_2+12A_1$ | 24 | 3, 4, 5, 6 |
| $3A_6+A_3$ | 28 | 1 |
| $3A_6+3A_1$ | 14 | 1 |
| $A_6+3A_5$ | 42 | 1 |
| $A_6+A_5+A_3+7A_1$ | 84 | 3, 4 |
| $A_6+A_4+11A_1$ | 70 | 4, 5 |
| $A_6+A_2+13A_1$ | 42 | 4, 5, 6 |
| $4A_5+A_1$ | 2 | 1, 2 |
| $3A_5+6A_1$ | 6 | 1, 2, 3, 4 |
| $A_5+A_4+12A_1$ | 30 | 3, 4, 5, 6 |
| $A_5+A_3+13A_1$ | 12 | 3, 4, 5, 6, 7 |
| $A_4+A_3+14A_1$ | 20 | 3, 4, 5, 6, 7 |
| $7A_3$ | 4 | 1, 2, 3, 4 |
| $A_3+18A_1$ | 4 | 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 |
| $A_2+19A_1$ | 6 | 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 |
| $21A_1$ | 2 | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 |

## Table QE: The complete list of extremal quasi-elliptic $K3$ surfaces

$p = 2$, $MW = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus r}$.

| $R$ | $\sigma$ | $r$ | $R$ | $\sigma$ | $r$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $2E_8 + D_4$ | 1 | 0 | $D_{12} + D_8$ | 1, 2 | $2 - \sigma$ |
| $E_8 + E_7 + 5A_1$ | 2 | 1 | $D_{12} + 2D_4$ | 2, 3 | $3 - \sigma$ |
| $E_8 + D_{12}$ | 1 | 0 | $D_{12} + 8A_1$ | 3, 4 | $5 - \sigma$ |
| $E_8 + D_8 + D_4$ | 2 | 0 | $D_{10} + D_6 + 4A_1$ | 2, 3 | $4 - \sigma$ |
| $E_8 + D_6 + 6A_1$ | 3 | 1 | $D_{10} + D_4 + 6A_1$ | 3, 4 | $5 - \sigma$ |
| $E_8 + 3D_4$ | 3 | 0 | $D_{10} + 10A_1$ | 4, 5 | $6 - \sigma$ |
| $E_8 + D_4 + 8A_1$ | 4 | 1 | $2D_8 + D_4$ | 1, 2, 3 | $3 - \sigma$ |
| $E_8 + 12A_1$ | 5 | 1 | $D_8 + D_6 + 6A_1$ | 2, 3, 4 | $5 - \sigma$ |
| $2E_7 + D_6$ | 1 | 1 | $D_8 + 3D_4$ | 2, 3, 4 | $4 - \sigma$ |
| $2E_7 + D_4 + 2A_1$ | 2 | 1 | $D_8 + D_4 + 8A_1$ | 3, 4, 5 | $6 - \sigma$ |
| $2E_7 + 6A_1$ | 3 | 1 | $D_8 + 12A_1$ | 4, 5, 6 | $7 - \sigma$ |
| $E_7 + D_{10} + 3A_1$ | 1, 2 | $3 - \sigma$ | $3D_6 + 2A_1$ | 1, 2, 3 | $4 - \sigma$ |
| $E_7 + D_8 + 5A_1$ | 2, 3 | $4 - \sigma$ | $2D_6 + D_4 + 4A_1$ | 2, 3, 4 | $5 - \sigma$ |
| $E_7 + 2D_6 + A_1$ | 2 | 1 | $2D_6 + 8A_1$ | 3, 4, 5 | $6 - \sigma$ |
| $E_7 + D_6 + D_4 + 3A_1$ | 2, 3 | $4 - \sigma$ | $D_6 + 2D_4 + 6A_1$ | 2, 3, 4, 5 | $6 - \sigma$ |
| $E_7 + D_6 + 7A_1$ | 3, 4 | $5 - \sigma$ | $D_6 + D_4 + 10A_1$ | 3, 4, 5, 6 | $7 - \sigma$ |
| $E_7 + 2D_4 + 5A_1$ | 3, 4 | $5 - \sigma$ | $D_6 + 14A_1$ | 3, 4, 5, 6, 7 | $8 - \sigma$ |
| $E_7 + D_4 + 9A_1$ | 3, 4, 5 | $6 - \sigma$ | $5D_4$ | 1, 2, 3, 4, 5 | $5 - \sigma$ |
| $E_7 + 13A_1$ | 4, 5, 6 | $7 - \sigma$ | $3D_4 + 8A_1$ | 2, 3, 4, 5, 6 | $7 - \sigma$ |
| $D_{20}$ | 1 | 0 | $2D_4 + 12A_1$ | 3, 4, 5, 6, 7 | $8 - \sigma$ |
| $D_{16} + D_4$ | 1, 2 | $2 - \sigma$ | $D_4 + 16A_1$ | 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 | $9 - \sigma$ |
| $D_{14} + 6A_1$ | 2, 3 | $4 - \sigma$ | $20A_1$ | 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 | $10 - \sigma$ |

$p = 3$, $MW = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^{\oplus r}$.

| $R$ | $\sigma$ | $r$ | $R$ | $\sigma$ | $r$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $2E_8 + 2A_2$ | 1 | 0 | $3E_6 + A_2$ | 1, 2 | $2 - \sigma$ |
| $E_8 + 2E_6$ | 1 | 0 | $2E_6 + 4A_2$ | 1, 2, 3 | $3 - \sigma$ |
| $E_8 + E_6 + 3A_2$ | 2 | 0 | $E_6 + 7A_2$ | 2, 3, 4 | $4 - \sigma$ |
| $E_8 + 6A_2$ | 2, 3 | $3 - \sigma$ | $10A_2$ | 1, 2, 3, 4, 5 | $5 - \sigma$ |

## Table E: The complete list of extremal elliptic $K3$ surfaces

$[a] = \mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$, $\quad [a, b] = \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$.

| $p$ | $R$ | $\sigma$ | $MW$ | $p$ | $R$ | $\sigma$ | $MW$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | $2A_{10}$ | 1 | 0 | 3 | $D_7 + A_{11} + A_2$ | 1 | [4] |
| 7 | $A_{13} + A_6 + A_1$ | 1 | [2] | 2 | $A_{17} + 3A_1$ | 1 | [6] |
| 7 | $E_8 + 2A_6$ | 1 | 0 | 2 | $4A_5$ | 1 | [3, 6] |
| 5 | $E_7 + A_9 + A_4$ | 1 | [2] | 2 | $2A_9 + 2A_1$ | 1 | [10] |
| 5 | $A_{14} + A_4 + A_2$ | 1 | [3] | 2 | $E_6 + A_{11} + A_3$ | 1 | [6] |
| 3 | $D_{16} + 2A_2$ | 1 | [2] | 2 | $D_5 + A_{15}$ | 1 | [4] |
| 3 | $D_{10} + 2A_5$ | 1 | [2, 2] | | | | |

# 参考文献


[1] M. Artin, *Some numerical criteria for contractability of curves on algebraic surfaces*, Amer. J. Math. **84** (1962), 485–496.

[2] ———, *On isolated rational singularities of surfaces*, Amer. J. Math. **88** (1966), 129–136.

[3] ———, *Supersingular $K3$ surfaces*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **7** (1974), 543–567 (1975).

[4] ———, *Coverings of the rational double points in characteristic $p$*, Complex analysis and algebraic geometry. Edited by W. L. Baily, Jr. and T. Shioda. Iwanami Shoten, Tokyo, 1977, pp. 11–22.

[5] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Fasc. XXXIV. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre IV: Groupes de Coxeter et systèmes de Tits. Chapitre V: Groupes engendrés par des réflexions. Chapitre VI: Systèmes de racines*, Hermann, Paris, 1968.

[6] I. R. Dolgachev and S. Kondo, *A supersingular $K3$ surface in characteristic 2 and the Leech lattice*, preprint, **math.AG/0112283** (2001).

[7] W. Ebeling, *Lattices and codes*, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1994.

[8] Y. Goto, *On the Néron-Severi groups of some $K3$ surfaces*, The arithmetic and geometry of algebraic cycles (Banff, AB, 1998), CRM Proc. Lecture Notes, vol. 24, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, pp. 305–328.

[9] H. Ito, *The Mordell-Weil groups of unirational quasi-elliptic surfaces in characteristic* 3, Math. Z. **211** (1992), no. 1, 1–39.

[10] ———, *The Mordell-Weil groups of unirational quasi-elliptic surfaces in characteristic* 2, Tohoku Math. J. (2) **46** (1994), no. 2, 221–251.

[11] ———, *On automorphisms of supersingular $K3$ surfaces*, Osaka J. Math. **34** (1997), no. 3, 713–724.

[12] ———, *On extremal elliptic surfaces in characteristic* 2 *and* 3, Hiroshima Math. J. **32** (2002), 179–188.

[13] S. Kondō, *Algebraic $K3$ surfaces with finite automorphism groups*, Nagoya Math. J., **116** (1989), 1–15.

[14] V. V. Nikulin, *Integer symmetric bilinear forms and some of their geometric applications*, Math USSR-Izv. **14** (1979), no. 1, 103–167.

[15] ———, *Weil linear systems on singular* $K3$ *surfaces*, Algebraic geometry and analytic geometry (Tokyo, 1990), Springer, Tokyo, 1991, pp. 138–164.

[16] K. Nishiyama, *The Jacobian fibrations on some* $K3$ *surfaces and their Mordell-Weil groups*, Japan. J. Math. (N.S.), **22** (1996), no. 2, 293–347.

[17] A. N. Rudakov and I. R. Šafarevič, *Supersingular* $K3$ *surfaces over fields of characteristic* 2, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **42** (1978), no. 4, 848–869: Igor R. Shafarevich, Collected mathematical papers, Springer-Verlag, Berlin, 1989, pp. 614–632.

[18] ———, *Surfaces of type* $K3$ *over fields of finite characteristic*, Current problems in mathematics, Vol. 18, Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Informatsii, Moscow, 1981, pp. 115–207: Igor R. Shafarevich, Collected mathematical papers, Springer-Verlag, Berlin, 1989, pp. 657–714.

[19] B. Saint-Donat, *Projective models of* $K-3$ *surfaces*, Amer. J. Math. **96** (1974), 602–639.

[20] I. Shimada, *Rational double points on supersingular* $K3$ *surfaces*, preprint, `http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~shimada/ssK3.html`

[21] T. Shioda, *Supersingular* $K3$ *surfaces*, Algebraic geometry (Proc. Summer Meeting, Univ. Copenhagen, Copenhagen, 1978), Lecture Notes in Math., Vol. 732, Springer, Berlin, 1979, pp. 564–591.

[22] ———, *On the Mordell-Weil lattices*, Comment. Math. Univ. St. Paul. **39** (1990), no. 2, 211–240.

060-0810
札幌市北区北１０条西８丁目
北海道大学理学部数学教室
shimada@math.sci.hokudai.ac.jp